SUBJECT: مقدمة / ١

تحليل المتجهات:
١- المتجهات والعمليات عليها.
٢- الدوال والحقول المتجهية.
٣- تكامل الدوال المتجهة وتطبيقات على التكامل.
٤- نظرية المنحنيات.

الفصل الأول: المتجهات والعمليات على المتجهات:
تعريف المتجه المقيد:
نفرض $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$
نقطتين في الفضاء النقطي R^2 ووصلنا بين النقطتين نسمي المفهوم الهندسي الذي عناصره:
١- البداية A والنهاية B.
2- الجهة: جهة الحركة من A إلى B.
3- المنحنى: يوازي الخط المار بـ A, B (المنحنى يعني تساير أو التوازي)
4- الطويلة: تساوي طول القطعة $\overrightarrow{AB}$ ويرمز لها $|\overrightarrow{AB}|$ وتعطى بالدستور:

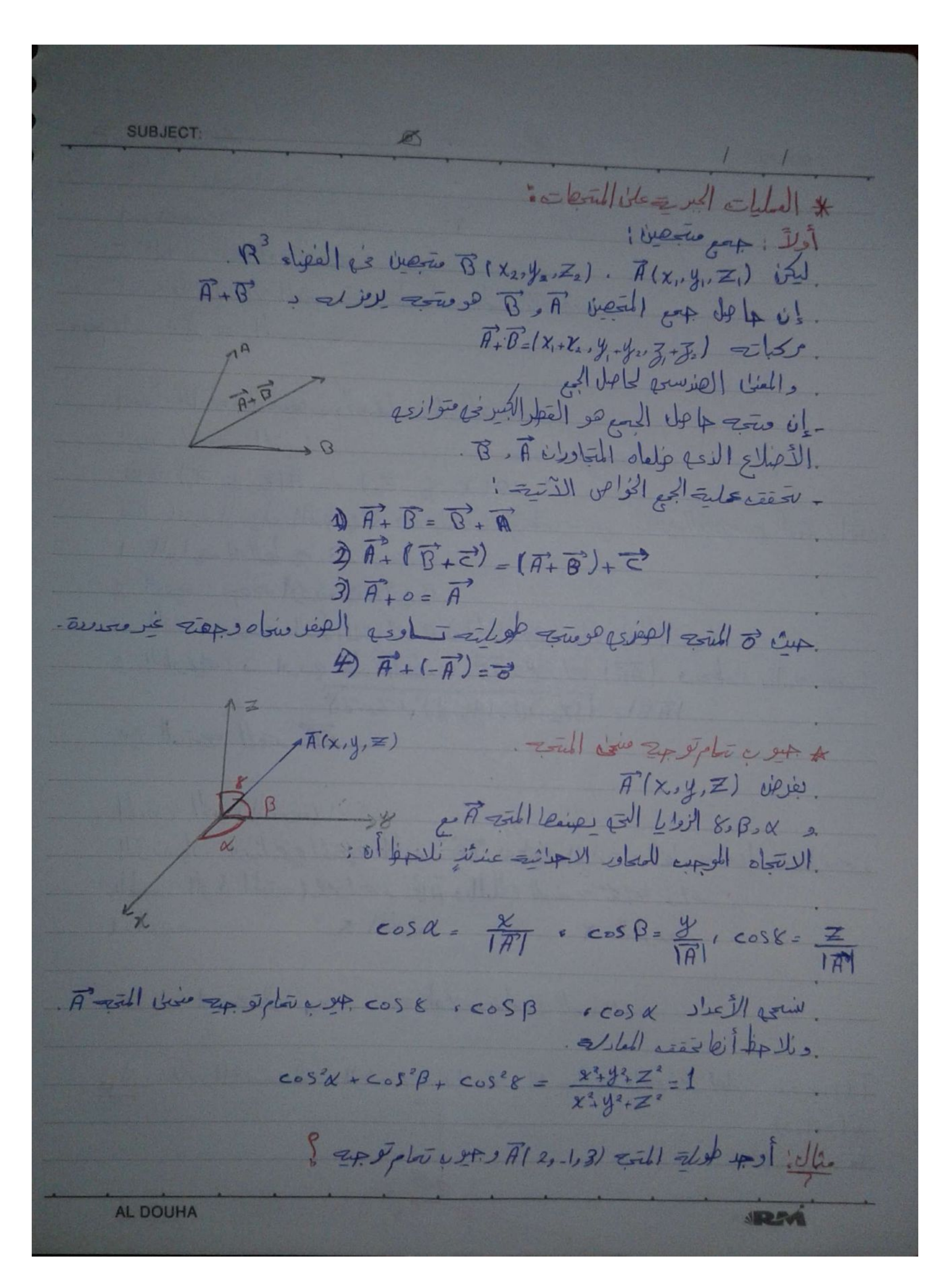
$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

- يرمز للمتجه المقيد $\overleftrightarrow{AB}$

المتجه الحر (المتجه):
الآن إذا حررنا في المتجه المقيد $\overleftrightarrow{AB}$ نقطتي البداية والنهاية نحصل على ما يسمى بالمتجه الحر (المتجه) يرمز له بـ $\overrightarrow{AB}$ وبالتالي للمتجه ثلاثة عناصر:
١- الجهة. ٢- المنحنى. ٣- الطويلة.

* تعريف: المتجه الواحدة هو متجه طويلته تساوي العدد (1)

مثال: على ذلك متجهات الواحدة على المحاور الاحداثية والتي نرمز لها بـ
$\vec{i}(1,0,0)$
$\vec{j}(0,1,0)$
$\vec{k}=(0,0,1)$



* العمليات الجبرية على المتجهات:

أولاً: جمع متجهين:

ليكن $\vec{A}(x_1,y_1,z_1)$ ، $\vec{B}(x_2,y_2,z_2)$ متجهين في الفضاء $\mathbb{R}^3$.

إن حاصل جمع المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو متجه يرمز له بـ $\vec{A}+\vec{B}$

مركباته $\vec{A}+\vec{B}=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

والمعنى الهندسي لحاصل الجمع

- إن متجه حاصل الجمع هو القطر الكبير في متوازي الأضلاع الذي ضلعاه المتجاوران $\vec{A}$ ، $\vec{B}$.
- تحقق عملية الجمع الخواص الآتية:

1) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

2) $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$

3) $\vec{A}+0=\vec{A}$

حيث $\vec{0}$ المتجه الصفري هو متجه طولته تساوي الصفر ومنحاه وجهته غير محددة.

4) $\vec{A}+(-\vec{A})=\vec{0}$

* جيوب تمام توجيه منحى المتجه.

بفرض $\vec{A}(x,y,z)$

و α,β,γ الزوايا التي يصنعها المتجه $\vec{A}$ مع الاتجاه الموجب للمحاور الاحداثية عندئذٍ نلاحظ أن:

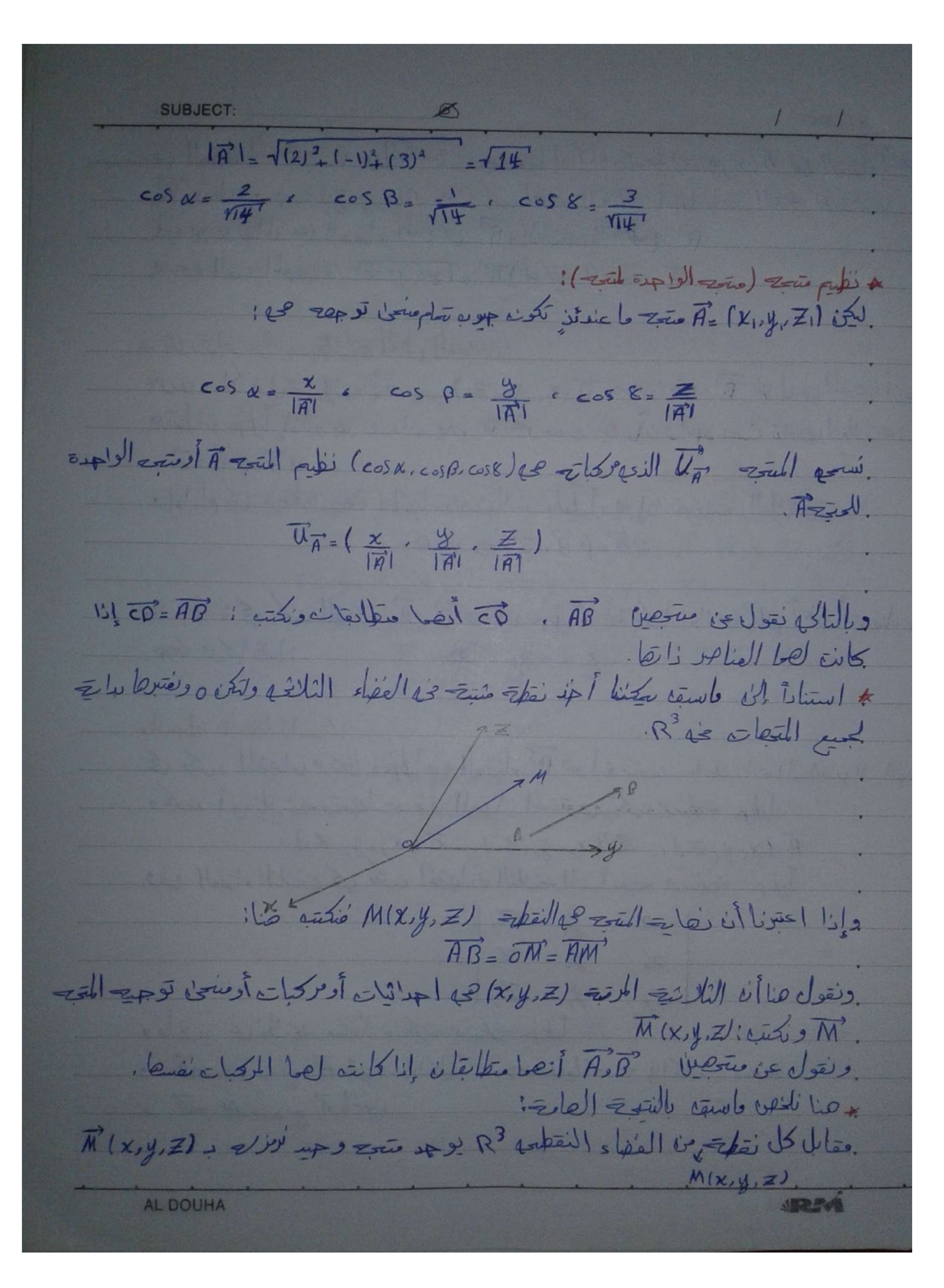
$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{A}|}\ ,\ \cos\beta=\frac{y}{|\vec{A}|}\ ,\ \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{A}|}$$

نسمي الأعداد $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ ، $\cos\gamma$ جيوب تمام توجيه منحى المتجه $\vec{A}$.

ونلاحظ أنها تحقق المعادلة.

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=1$$

مثال: أوجد طولة المتجه $\vec{A}(2,-1,3)$ وجيوب تمام توجيه؟



$|\vec{A}| = \sqrt{(2)^2+(-1)^2+(3)^2} = \sqrt{14}$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}$ ، $\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{14}}$ ، $\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$

★ تنظيم متجه (متجه الواحدة لمتجه):

ليكن $\vec{A}=(x_1, y_1, z_1)$ متجه ما عندئذٍ تكون جيوب تمام منحى توجهه هي:

$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{A}|}$ ، $\cos\beta = \frac{y}{|\vec{A}|}$ ، $\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{A}|}$

نسمي المتجه $\vec{U}_{\vec{A}}$ الذي مركباته هي $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ تنظيم المتجه $\vec{A}$ أو متجه الواحدة للمتجه $\vec{A}$.

$\vec{U}_{\vec{A}} = \left(\frac{x}{|\vec{A}|}, \frac{y}{|\vec{A}|}, \frac{z}{|\vec{A}|}\right)$

وبالتالي نقول عن متجهين $\vec{AB}$ ، $\vec{CD}$ أنهما متطابقان ونكتب: $\vec{CD}=\vec{AB}$ إذا كانت لهما العناصر ذاتها.

★ استناداً إلى ماسبق يمكننا أخذ نقطة مثبتة في الفضاء الثلاثي ولتكن O ونعتبرها بداية لجميع المتجهات في R^3.

وإذا اعتبرنا أن نهاية المتجه هي النقطة $M(x,y,z)$ فنكتب هنا:

$\vec{AB}=\vec{OM}=\vec{AM}$

ونقول هنا أن الثلاثية المرتبة (x,y,z) هي احداثيات أو مركبات أو منحى توجيه المتجه $\vec{M}$ ونكتب: $\vec{M}(x,y,z)$.

ونقول عن متجهين $\vec{A}, \vec{B}$ أنهما متطابقان إذا كانت لهما المركبات نفسها.

★ هنا نلخص ماسبق بالنتيجة الهامة:

مقابل كل نقطة من الفضاء النقطي R^3 يوجد متجه وحيد نرمز له ب $\vec{M}(x,y,z)$

$M(x,y,z)$

SUBJECT:

في الفضاء المتجهي $\vec{R}^3$ وبالعكس يوجد مقابل كل متجه $\vec{A}(x,y,z)$ في الفضاء المتجهي $\vec{R}^3$ نقطة وحيدة $A(x,y,z)$ بحيث يكون لهذه النقطة إحداثيات المتجه $\vec{A}$ ذاتها

أي يوجد تقابل بين الفضاء المتجهي $\vec{R}^3$ والفضاء النقطي R^3.

نسمي العدد الموجب $|\vec{A}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ طويلة المتجه $\vec{A}$

★ الارتباط والاستقلال الخطي للمتجهين:

تعريف: ليكن $\vec{A}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{B}(x_2,y_2,z_2)$ متجهين في $\vec{R}^3$ نقول عن المتجهين أنهما مرتبطان خطياً إذا وجد عددان α، β غير معدومين بآن واحد بحيث تتحقق العلاقة:

$$\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}=\vec{0}$$

وإذا لم يكن مرتبطين يدعى المتجهان مستقلان خطياً أي إذا تحققت العلاقة

$$\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}=\vec{0} \Rightarrow \alpha=\beta=0$$

ملاحظة: كي يكون المتجهان $\vec{A}$، $\vec{B}$ مرتبطين خطياً هو أن يكونا متوازيين بكلام آخر أن تتناسب مركباتهما:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

ملاحظة هامة (قاعدة):

كي يكون المتجهان مرتبطان خطياً في الفضاء $\vec{R}^3$ هو أن تتحقق علاقات التناسب السابقة ويكون أي ثلاث متجهات في الفضاء المستوي تكون مرتبطة خطياً

$\vec{A}(x_1,y_1,z_1)$، $\vec{B}(x_2,y_2,z_2)$، $\vec{C}(x_3,y_3,z_3)$

وفي الفضاء الثلاثي كي تكون المتجهات الثلاثة السابقة مرتبطة خطياً

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

وما يزيد عن ثلاث متجهات تكون مرتبطة خطياً.

و $m\vec{A}$ يتوافق مع $\vec{A}$ بالجهة إذا كان $m>0$ ويعاكسه إذا كان $m<0$.

و $m\vec{A}$ يتوافق مع $\vec{A}$ بالمنحى.

SUBJECT: / /

خواص جداء عدد بمتجه :

ليكن $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ متجهين في R^3 ، m ، n عددين حقيقين عندئذ :

1) $m(n\vec{A}) = (m.n)\vec{A} = n(m.\vec{A})$

2) $m(\vec{A}+\vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$

3) $(m+n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$

4) $1.\vec{A} = \vec{A}$

5) $m.\vec{A} = \vec{0} \iff m = 0$

★ الصيغة التحليلية لمتجه :

استناداً إلى عملية جداء عدد بمتجه يمكننا استنتاج الصيغة التحليلية لمتجه.

ليكن $\vec{A} = (x, y, z)$ عندئذٍ

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

$$(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

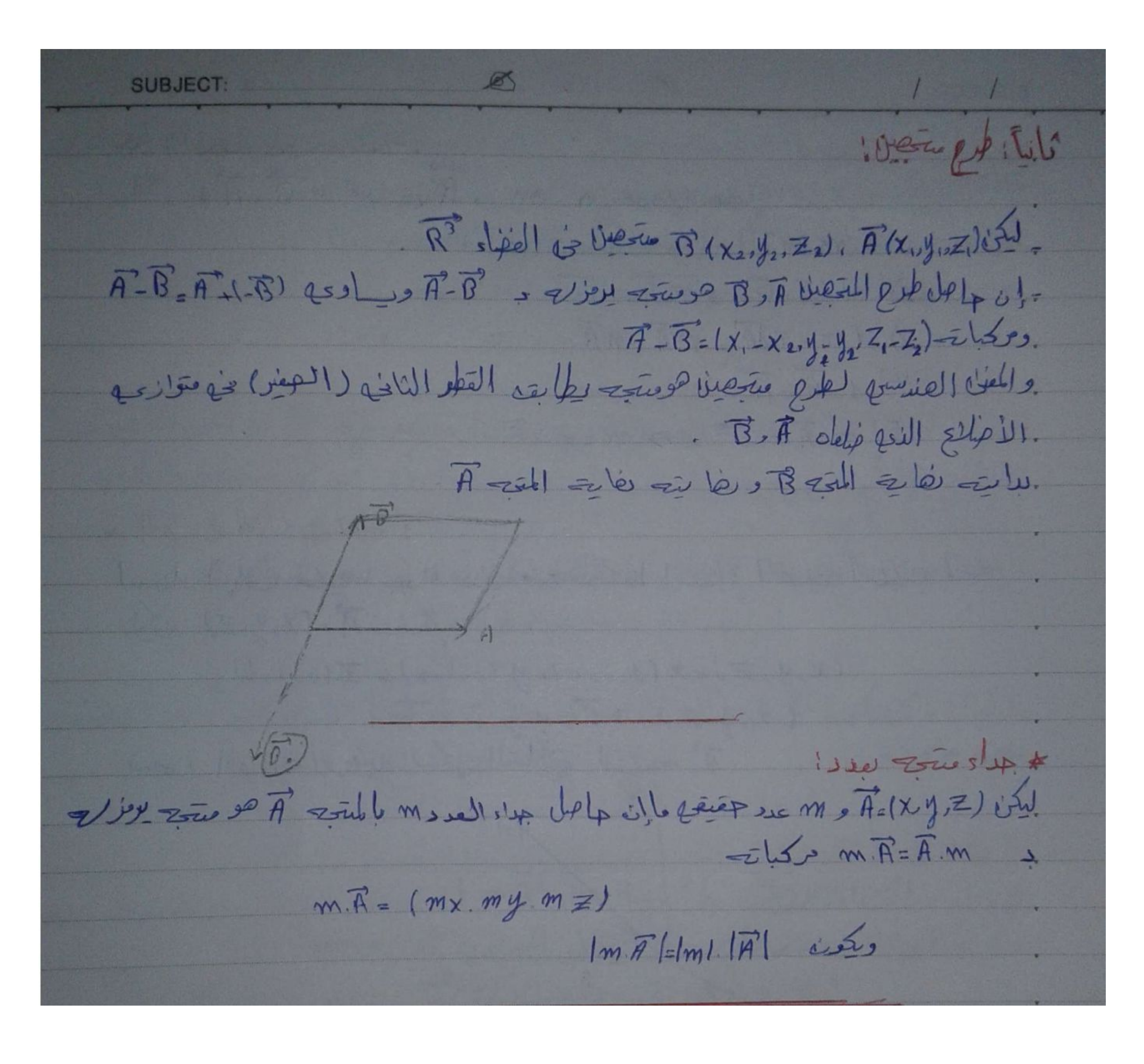
تسمى الصيغة الأخيرة الشكل التحليلي للمتجه $\vec{A}$.

ونذكر بأن $-\vec{A}$ هو معكوس المتجه $\vec{A}$ بالجهة ويطابق $\vec{A}$ بالمنحى والطويلة.

★ علاقة شال :

بفرض $\overrightarrow{A_1A_2}$ ، $\overrightarrow{A_2A_3}$ ، $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ متجهات في الفضاء R^3 عندئذٍ يكون :

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$$



SUBJECT: / /

ثانياً: طرح متجهين:

- ليكن $\vec{A}(x_1, y_1, z_1)$ ، $\vec{B}(x_2, y_2, z_2)$ متجهين في الفضاء $\vec{R^3}$.
- إن حاصل طرح المتجهين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ هو متجه يرمز له بـ $\vec{A}-\vec{B}$ ويساوي $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$
- ومركباته $\vec{A}-\vec{B}=(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$
- والمعنى الهندسي لطرح متجهين هو متجه يطابق القطر الثاني (الصغير) في متوازي الأضلاع الذي ضلعاه $\vec{A}$ ، $\vec{B}$.
- بدايته نهاية المتجه $\vec{B}$ ونهايته نهاية المتجه $\vec{A}$

* جداء متجه بعدد:

ليكن $\vec{A}=(x, y, z)$ و m عدد حقيقي ما، إن حاصل جداء العدد m بالمتجه $\vec{A}$ هو متجه يرمز له بـ $m.\vec{A}=\vec{A}.m$ مركباته

$$m.\vec{A}=(mx . my . mz)$$

ويكون $|m.\vec{A}|=|m|.|\vec{A}|$